

مبحث: تبدیل های هندسی و کاربر ها

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه چهارم
نام درس و مقطع و رشته: هندسه پایه - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۰۱/۰۵

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم	خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)
کتاب درسی		
کتاب آبی		
کتاب نوروز		



نکته برداری و خلاصه نویسی

تعریف تبدیل در صفحه

تبدیل در صفحه، تابعی است که به هر نقطه A واقع در صفحه، یک و تنها یک نقطه مانند A' از همان صفحه را نسبت می دهد و برعکس، هر نقطه مانند A' دقیقاً تصویر یک و تنها یک نقطه مانند A از همان صفحه باشد.

اگر نام تبدیلی T باشد، آن را به صورت $\begin{cases} T: p \rightarrow p \\ T(A) = A' \end{cases}$ و گاهی به صورت خلاصه تر با نماد $T(A) = A'$ نمایش داده می شود.

تبدیل طول یا (ایزومتري)

تبدیل هایی که طول پاره خط را ثابت نگاه می دارند، تبدیل طول یا (ایزومتري) می نامند.

پس اگر T یک تبدیل طول یا باشد و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن گاه $AB = A'B'$.

قضیه: اگر تبدیلی طول یا باشد، آن گاه تبدیل یافته هر زاویه با همان زاویه برابر است.

تبدیلی که شیب را حفظ میکند (تبدیل شیب یا)

اگر در تبدیلی، تبدیل یافته هر پاره خط با همان پاره خط موازی باشد، آن گاه می گوییم «آن تبدیل شیب را حفظ می کند» و یا به صورت خلاصه می گوییم «تبدیل، شیب پا است»؛ پس اگر T تبدیلی شیب پا باشد و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن گاه $AB \parallel A'B'$.

۱ در تمام تبدیلاتی که در کتاب درسی مطرح شده اند، تبدیل یافته هر خط راست، یک خط راست می باشد.

تعریف نقطه ثابت تبدیل

در هر تبدیل، نقطه ای را که بر تبدیل یافته اش منطبق باشد (یعنی تبدیل یافته نقطه A همان نقطه A باشد) نقطه ثابت تبدیل می نامند.

❓ مثلث ABC که در آن $AB = AC = ۱۵$ و $BC = ۲۴$ مفروض است. اگر T تبدیلی طول یا

باشد و مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ تبدیل کند، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

(۱) ۹۶ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۹۲ (۴) ۲۱۶

بازتاب (نسبت به یک محور)

تعریف: خط ثابت d و نقطه دلخواه A را در صفحه در نظر می گیریم.

اگر A بر d منطبق باشد، بازتاب آن بر خودش منطبق است.

اگر A بر d منطبق نباشد، چنان چه از A عمود AH را بر d رسم کنیم و به اندازه AH (از طرف نقطه H) امتداد دهیم تا A' به دست آید، A' را بازتاب نقطه A نسبت به خط d می نامند (د) را محور بازتاب یا محور تقارن می نامند).

معمولاً بازتاب نسبت به خط d را با نماد S_d نمایش می دهیم و می نویسیم $S_d(A) = A'$.

ویژگی های بازتاب نسبت به یک خط

۱ بازتاب، تبدیلی طول یا است.

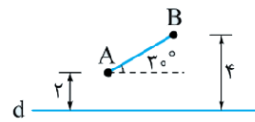
۲ بازتاب، در حالت کلی شیب را حفظ نمی کند (مگر آن که خط بر d عمود یا با آن موازی باشد).

۳ هر نقطه روی محور بازتاب، یک نقطه ثابت تبدیل است.

۴ اگر AB و d موازی نباشند و $A'B'$ بازتاب AB نسبت به d باشد، آن گاه AB ، $A'B'$ و d در یک نقطه هم رس هستند.



در شکل زیر، اگر A' و B' به ترتیب، بازتاب‌های دو نقطه A و B نسبت به خط d باشند، با توجه به اندازه‌های روی آن، طول AB' کدام است؟



- (۱) ۶
(۲) $6\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) ۸

انتقال

تعریف: در صفحه P بردار ثابت $\vec{V}$ را در نظر می‌گیریم. انتقال یافته نقطه A تحت بردار $\vec{V}$ نقطه‌ای مانند A' است، طوری که $\vec{AA'} = \vec{V}$.

اگر A' و B' انتقال یافته‌های دو نقطه A و B تحت بردار $\vec{V}$ باشند، آن‌گاه چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است (به شرط آن که AB با $\vec{V}$ موازی نباشد) و طول‌های دو پاره‌خط AA' و BB' برابر طول بردار $\vec{V}$ است.

ویژگی‌های انتقال

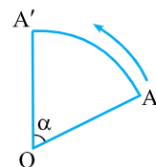
- انتقال، تبدیلی طول‌پا است.
- انتقال، تبدیلی است که شیب را حفظ می‌کند.
- اگر بردار $\vec{V}$ مخالف صفر باشد، آن‌گاه انتقال تحت بردار $\vec{V}$ نقطه ثابت تبدیل ندارد.

دو نقطه A و B به فاصله 10 از یکدیگر مفروض‌اند. اگر $\vec{V}$ برداری به طول 5 باشد، طوری که زاویه بین $\vec{AB}$ و $\vec{V}$ برابر 60° باشد و A' و B' انتقال یافته‌های A و B تحت بردار $\vec{V}$ باشند، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟

- (۱) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ (۳) $25\sqrt{3}$ (۴) $50\sqrt{3}$

دوران

نقطه ثابت O و زاویه جهت‌دار α را در صفحه در نظر می‌گیریم. دوران یافته نقطه A در دورانی به مرکز O و به اندازه α ، نقطه‌ای مانند A' است، طوری که هر دو شرط زیر را داشته باشد:



الف) $OA' = OA$

ب) $\angle AOA' = \alpha$

و آن را به صورت $R_O^\alpha(A) = A'$ نمایش می‌دهند.

توجه داشته باشیم که دوران به مرکز O و زاویه 180° ، همان بازتاب نسبت به مرکز O است.

ویژگی‌های تبدیل دوران

- دوران، تبدیلی طول‌پا است.
- دوران در حالت کلی شیب را حفظ نمی‌کند (مگر زمانی که زاویه دوران، مضرب صحیحی از 180° باشد).

در هر دوران، زاویه بین هر خط و دوران یافته‌اش، برابر زاویه دوران است.

تنها نقطه ثابت در دوران، همان مرکز دوران است.

خط d و نقطه A به فاصله 6 از آن در صفحه مفروض‌اند. اگر d' دوران یافته d حول نقطه A با زاویه 60° باشد، چنان‌چه H و H' به ترتیب پای عمودهایی باشند که از A بر d و d' رسم می‌شوند و M در d' و d متقاطع باشند، مساحت چهارضلعی $AHHM$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) $12\sqrt{3}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{3}$



تعریف: نقطه ثابت O و عدد حقیقی و مخالف صفر k را در نظر می‌گیریم. اگر A نقطه‌ای از صفحه باشد که بر O منطبق نباشد، مجانس A در تجانسی به مرکز O و با نسبت k ، نقطه‌ای مانند A' است، طوری که هر سه شرط زیر را دارا باشد:

الف) سه نقطه O ، A و A' بر یک راستا باشند.

ب) $OA' = |k| \cdot OA$

پ) اگر $k > 0$ ، آن‌گاه O بیرون A و A' و اگر $k < 0$ آن‌گاه O بین A و A' است.

دوران به مرکز O و با نسبت k را با نماد $H_O^k(A) = A'$ نمایش می‌دهند.

توجه داشته باشیم تجانسی به مرکز O و با نسبت $k = -1$ همان بازتاب نسبت به نقطه O می‌باشد.

اصطلاحاتی در تجانس

۱) اگر $k > 0$ باشد، تجانس را مستقیم و اگر $k < 0$ باشد، تجانس را معکوس می‌نامند.

۲) اگر $|k| > 1$ باشد، تجانس را انبساطی و اگر $|k| < 1$ باشد، تجانس را انقباضی می‌نامند.

ویژگی‌ها تجانس

۱) تجانس در حالت کلی طول را نیست، مگر آن‌که $k = \pm 1$ باشد.

۲) مجانس هر خط راست، یک خط راست است و اگر مرکز تجانس روی خطی باشد، مجانس آن خط بر خودش منطبق است.

۳) تجانس شیب را حفظ می‌کند.

۴) مجانس یک چندضلعی، چندضلعی‌ای مشابه با آن است که اضلاع متناظر آن‌ها دوجه‌دو موازی یکدیگرند (توجه داشته باشیم که دو شکل متشابه دلیلی ندارد مجانس یکدیگر باشند)، در نتیجه نسبت محیط‌های آن‌ها برابر $|k|$ و نسبت مساحت‌های آن‌ها k^2 است.

۵) مرکز تجانس، تنها نقطه ثابت تبدیل تجانس است.

۶) مجانس دایره‌ای به شعاع R در تجانسی با نسبت k ، دایره‌ای است به شعاع $|k| \cdot R$ و مرکز این دایره، مجانس مرکز دایره اولیه می‌باشد.

۷) دو دایره با شعاع‌های نامساوی اگر دارای دو مماس مشترک خارجی باشند، نقطه هم‌رسی دو مماس مشترک خارجی و خط‌المركزین، مرکز تجانس مستقیم آن دو دایره است و $k = \frac{R}{R'}$ است ($R \neq R'$). اگر این دو دایره دارای مماس مشترک داخلی باشند، نقطه هم‌رسی مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین، مرکز تجانس معکوس آن دو دایره است و نسبت تجانس $k = -\frac{R}{R'}$ می‌باشد.

تبدیل همانی

تبدیلی که تصویر هر نقطه از صفحه بر خودش منطبق باشد، تبدیل همانی است.

به عنوان مثال، دوران‌هایی با زاویه‌های مضرب صحیح 36° تبدیل‌های همانی هستند و یا تجانسی که نسبت تجانس $k = 1$ باشد، تبدیلی همانی است.

❓ دایره $C(A, 2)$ و نقطه O در یک صفحه مفروض‌اند. اگر $OA = 3$ و $C(A', R')$ مجانس

دایره C در تجانسی به مرکز O و با نسبت $k = -2$ باشد، نسبت $\frac{AA'}{R'}$ کدام است؟

۲/۵ (۴)

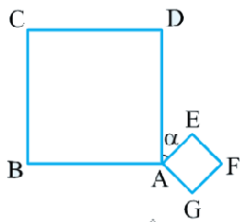
۲/۲۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۷۵ (۱)



در شکل زیر $ABCD$ و $AEFG$ دو مربع هستند. کدام گزینه درست است؟



(۱) $BE = DG$ و زاویه بین آن‌ها هر مقداری می‌تواند باشد.

(۲) $BE = DG$ و زاویه بین آن‌ها α است.

(۳) $CF \perp DG$ و $CF = DG$

(۴) $BE \perp DG$ و $BE = DG$

= گزینه «۴» اگر G را حول A به اندازه 90° دوران دهیم بر E تصویر می‌شود و هم‌چنین

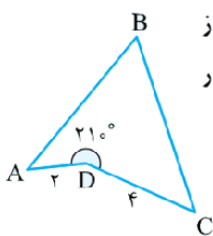
D نیز بر B تصویر می‌شود، پس:

$$\left. \begin{array}{l} R_A^{90^\circ}(G) = E \\ R_A^{90^\circ}(D) = B \end{array} \right\} \Rightarrow R_A^{90^\circ}(DG) = BE$$

در شکل مقابل، زاویه درونی $\hat{D}$ برابر 21° است. اگر با استفاده از

بازتاب و بدون تغییر محیط چهارضلعی، مساحت آن را افزایش دهیم، مقدار

افزایش مساحت چه قدر است؟



(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۶

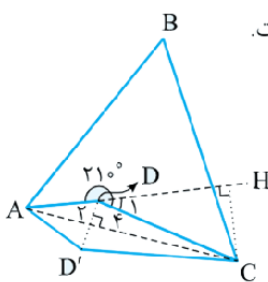
(۳) ۱

= گزینه «۲» اگر بازتاب D نسبت به AC را D' بنامیم، آن‌گاه مساحت آن به اندازه

مساحت $ADCD'$ افزایش می‌یابد که دو برابر مساحت ADC است.

روشن است که $\hat{D}_1 = 3^\circ$ و اگر از C عمود CH را بر AD رسم

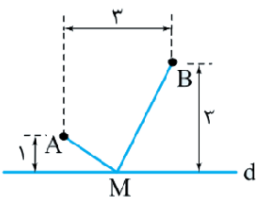
کنیم، آن‌گاه $CH = \frac{1}{2}DC = 2$ پس:



$$S_{ADC} = \frac{1}{2}AD \times CH = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

در نتیجه، مقدار افزایش مساحت $2 \times 2 = 4$ است.

در شکل زیر، اگر AMB کوتاه‌ترین مسیر باشد، آن‌گاه طول این مسیر کدام است؟



(۱) ۵

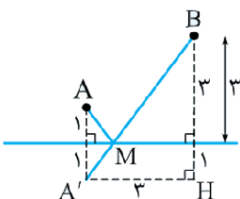
(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۴/۵

= گزینه «۱» اگر A' بازتاب A نسبت به d باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر، برابر با طول

پاره‌خط $A'B$ است؛ با توجه به شکل داریم:



$$A'B^2 = A'H^2 + BH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow A'B = 5$$